炎德·英才·名校联考联合体2022年秋季高二年级第一次联考

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	A	D	A	B	A	B	ABD	BCD	ABC	ABC

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1.B 【解析】因为$B=\{x|(x+1)(x-4)<0\}=\{x|-1<x<4\}$，$A=\{-1,0,1,2,3,4\}$，所以$A\cap B=\{0,1,2,3\}$，故选B.

2.A 【解析】由$z(1+2\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$得$z=\frac{3-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$，所以$|z|=\frac{|3-\mathrm{i}|}{|1+2\mathrm{i}|}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$，故选A.

3.A 【解析】因为由$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\Rightarrow 12\overrightarrow{OD}=6\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\Rightarrow 6(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=4(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，所以$A,B,C,D$四点共面，所以充分性成立；但当$A,B,C,D$四点共面时，存在$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，可知必要性不成立.故选A.

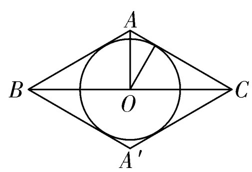
4.D 【解析】当直线l过圆心C时，弦长PQ取最大值4，当直线$l\perp AC$时，圆心C到直线l的距离最大，最大值为$\sqrt{2}$，此时弦长PQ取最小值$2\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$，故选D.

5.A 【解析】设计算机在一般状态下破译该密码所需的时间为x秒，则有$x=\frac{2^{1024}}{2.5\times10^{14}}$，

两边取常用对数，得$\lg x=\lg\frac{2^{1024}}{2.5\times10^{14}}=\lg 2^{1024}-\lg(2.5\times10^{14})=1024\lg 2-(\lg 25+13)=1024\lg 2-(2\lg 5+13)=1024\lg 2-2(1-\lg 2)-13=1026\lg 2-15\approx 292.8$，所以$x\approx 10^{292.8}=10^{292}\times10^{0.8}\approx 6.310\times10^{292}$.故选A.

6.B 【解析】由已知$|AF_2|=|F_2F_1|=2c$，由双曲线的定义可知$|AF_1|-|AF_2|=2a$，可得$|AF_1|=2a+2c$，从而$\frac{|AF_1|}{2}=a+c$，所以在等腰三角形AF_1F_2中，$\cos\angle OF_1A=\frac{a+c}{2c}=\frac{3}{4}$，得$c=2a$，所以$e=\frac{c}{a}=2$，故选B.

7.A 【解析】如图所示，旋转体的轴截面是边长为3的菱形，O为内切球的球心，因为$AB=AC=3$，$\angle ABC=30^\circ$，所以$\angle ACB=\angle ABC=30^\circ$，$\angle BAC=120^\circ$，所以内切球的半径$r=AC\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，故$V=\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^3=\frac{27\sqrt{3}\pi}{16}$，故选A.



8.B 【解析】由题意设$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，直线l为$x=-a$，设直线MF_1，MF_2的倾斜角分别为α,β，由椭圆的对称性，不妨设M为第二象限的点，即$M(-a,t)(t>0)$，则$\tan\alpha=\frac{t}{c-a}$，$\tan\beta=\frac{-t}{c+a}$.$\because\angle F_1MF_2=\beta-\alpha$，

$$\therefore\tan\angle F_1MF_2=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{t}{c+a}-\frac{t}{c-a}}{1-\frac{t^2}{c^2-a^2}}=\frac{2ct}{t^2+3}=\frac{2c}{t+\frac{3}{t}}\leqslant\frac{2c}{2\sqrt{t\cdot\frac{3}{t}}}=\frac{2c}{2\sqrt{3}}=\frac{c}{\sqrt{3}}$$，当且仅当

$t=\frac{3}{t}$，即$t=\sqrt{3}$时取等号，又$\tan\angle F_1MF_2$的最大值为$\frac{c}{\sqrt{3}}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，

得$c=3$，从而$a^2=c^2+3=12$，故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$.故选B.

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. ABD 【**解析**】对于 A,由频率分布直方图性质得:$(a+0.02+0.035+0.025+a)\times10=1$,解得 $a=0.01$,故 A 正确;

对于 B,由频率分布直方图得:成绩落在区间$[60,70)$的频率为 0.2,所以人数为 $0.2\times1000=200$,故 B 正确;

对于 C,由频率分布直方图得:$[50,70)$的频率为$(0.01+0.02)\times10=0.3$,$[70,80)$的频率为 $0.035\times10=0.35$,所以成绩的中位数位于区间$[70,80)$内,故 C 错误;

对于 D,估计成绩的平均数为:$\overline{x}=55\times0.01\times10+65\times0.02\times10+75\times0.035\times10+85\times0.025\times10+95\times0.01\times10=75.5$,所以成绩的平均数落在区间$[70,80)$内,故 D 正确. 故选 ABD.

10. BCD 【**解析**】对于 A,函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为 π,故 A 错误;

对于 B,当 $x=\dfrac{5\pi}{8}$时,$f\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=0$,故函数 $f(x)$的图象的一个对称中心为$\left(\dfrac{5\pi}{8},0\right)$满足条件,故 B 正确;

对于 C,令$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,整理得:$-\dfrac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{3\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,所以函数 $f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{3\pi}{8}\right)$上单调递增,故 C 正确;

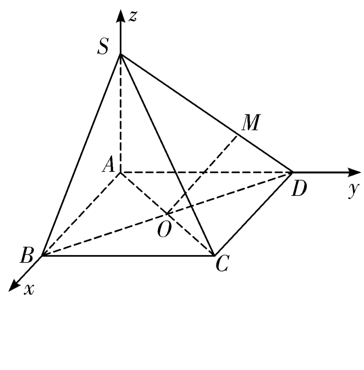
对于 D,函数 $f(x)$的图象向左平移$\dfrac{3\pi}{8}$个单位后得到 $g(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos 2x$,函数 $g(x)$为偶函数,故 D 正确. 故选 BCD.

11. ABC 【**解析**】当 M 为 SD 中点时,OM 是$\triangle SBD$ 的中位线,所以 $OM/\!/SB$,又 $OM\not\subset$平面 SBC,$SB\subset$平面 SBC,所以 $OM/\!/$平面 SBC,故 A 正确;

由题设 $V_{S\text{-}ACM}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle SAC}\times h$,因为底面 $ABCD$ 为正方形,故 $OD\perp AC$,

又 $SA\perp$底面 $ABCD$,所以 $SA\perp OD$,又 $SA\cap AC=A$,所以 $OD\perp$底面 SAC,所以当 M 与 D 重合时,三棱锥 $S-ACM$的体积最大,且为 $V_{S\text{-}ACM}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{4}{3}$,故 B 正确;

以 A 为坐标原点,AB,AD,AS 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系,如图,



又 $SA=AB=2$,则 $A(0,0,0)$,$C(2,2,0)$,$B(2,0,0)$,$D(0,2,0)$,$S(0,0,2)$,$O(1,1,0)$,

由 M 是棱 SD 上的动点,设 $M(0,\lambda,2-\lambda)$,$(0\leqslant\lambda\leqslant2)$,

点 M 到平面 $ABCD$ 的距离 $d_1=2-\lambda$,点 M 到平面 SAB 的距离

$d_2=\dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{|(0,\lambda,2-\lambda)\cdot(0,2,0)|}{2}=\lambda$,

所以 $d_1+d_2=2-\lambda+\lambda=2$,故 C 正确;

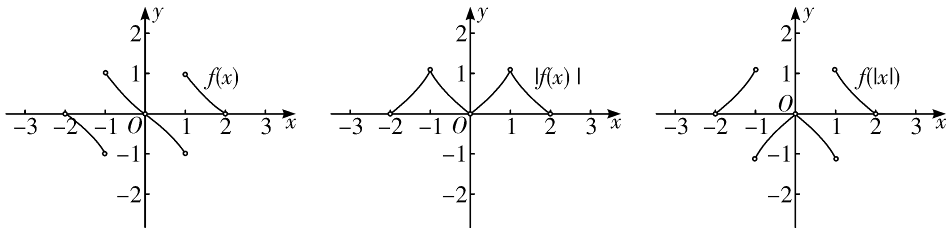
$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{OM}=(-1,\lambda-1,2-\lambda)$,若存在点 M,使直线 OM 与 AB 所成的角为 30°,

则 $\cos 30^\circ=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{OM}|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+(\lambda-1)^2+(2-\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,化简得 $3\lambda^2-9\lambda+7=0$,无解,故 D 错误.

故选 ABC.

12. ABC 【**解析**】由题知 $y=f(x)$为奇函数,其图象关于原点中心对称,又对定义域内的任意 x 都有 $f(1+x)=-f(1-x)$,所以其图象还关于点$(1,0)$对称,据此可判断函数 $f(x)$为周期函数,2 是函数 $f(x)$的周期. 又当 $x\in(1,2)$时,$2-x\in(0,1)$,$f(x)=-f(2-x)=-(\log_2(2-(2-x))-1)=1-\log_2 x$;函数 $y=f(|x|)$为偶

函数，其图象关于 y 轴对称. 画出函数图象可知 ABC 正确，D 错误. 故选 ABC.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{b}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量，所以 $|\boldsymbol{a}-\sqrt{2}\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\sqrt{2}\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2-2\sqrt{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{b}$.

14. $y=2x$，或 $x-y+1=0$，或 $x+y-3=0$（写出任意一条即可得满分）

【解析】当直线经过原点时，横、纵截距都为 0，则直线方程为 $y=2x$；

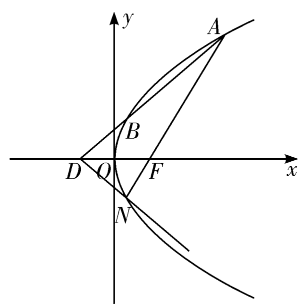
当直线不经过原点时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. 由题意得 $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1,\\|a|=|b|,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3,\\b=3,\end{cases}$

直线方程为 $x-y+1=0$，或 $x+y-3=0$.

15. $\frac{3}{4}$ 【解析】因为 $\frac{2\sin^2\alpha-1}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=2$，解得 $\tan\alpha=-3$. 所以

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times(-3)}{1-(-3)^2}=\frac{3}{4}$.

16. 8 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由于抛物线 C 关于 x 轴对称，若抛物线 C 上存在不同于点 A,B 的一点 N，满足 $|DB|=|DN|$，∴点 B 与点 N 关于 x 轴对称，则点 $N(x_2,-y_2)$，



设直线 AN 的方程为 $x=ty+n$，联立 $\begin{cases}x=ty+n,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消 x 可得 $y^2-4ty-4n=0$，

根据题意 $\Delta=(-4t)^2+16n>0$，∴ $y_1-y_2=4t$，$-y_1y_2=-4n$，

联立 $\begin{cases}x-2y+1=0,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消 x 可得 $y^2-8y+4=0$，

∴ $y_1+y_2=8$，$y_1y_2=4$，∴ $n=1$，则直线 AN 与 x 轴的交点坐标为 $(1,0)$，

∵直线 l：$x-2y+1=0$ 与 x 轴交点 D 的坐标为 $(-1,0)$，

∴ $S_{\triangle DAN}=\frac{1}{2}\times 2(|y_1|+|y_2|)=|y_1+y_2|=8$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 由正弦定理得 $\sin A\sin B=\sin B\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$. ………………………………… 1 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，$\sin A=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$，………………………………… 2 分

化简得 $\sin A=\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$，………………………………… 3 分

即 $\tan A=\sqrt{3}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………… 5 分

(2) 由 (1) $A=\frac{\pi}{3}$，又 $a=2\sqrt{6}$，$b+c=6$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=(b+c)^2-3bc$，

所以 $bc=\frac{(b+c)^2-a^2}{3}=\frac{6^2-(2\sqrt{6})^2}{3}=4$， ………………………………………………………… 8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)因为函数 $y=a^x$，$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$在区间$[1,2]$上的单调性相同，

所以函数 $f(x)=a^x+\log_a x(a>0,a\neq1)$在区间$[1,2]$上是单调函数，………………………………… 2 分

所以函数 $f(x)$在区间$[1,2]$上的最大值与最小值之和为 $a+a^2+\log_a 2=6+\log_a 2$，………………… 4 分

所以 $a^2+a-6=0$，解得 $a=2$ 和 $a=-3$(舍)，

所以实数 a 的值为 2. ……………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)得 $f(x)=2^x+\log_2 x$，

因为对于任意的 $x\in[2,+\infty)$，不等式 $kf(x)-1\geqslant0$ 恒成立，且 $f(x)>0$ 恒成立，

所以对于任意的 $x\in[2,+\infty)$，$k\geqslant\frac{1}{f(x)}$恒成立， ……………………………………………… 8 分

当 $x\in[2,+\infty)$时，$f(x)=2^x+\log_2 x$ 为单调递增函数， ……………………………………………… 9 分

所以 $f(x)\geqslant f(2)=5$，所以$\frac{1}{f(x)}\leqslant\frac{1}{5}$，即 $k\geqslant\frac{1}{5}$，

所以实数 k 的取值范围是$\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$. ……………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)因为圆 M：$(x+1)^2+(y-2)^2=2$ 关于直线 $2ax+by+6=0$ 对称，

所以直线 $2ax+by+6=0$ 过圆心 $M(-1,2)$，所以$-2a+2b+6=0$，即 $a-b-3=0$，

故点 P 的轨迹方程为 $x-y-3=0$，…………………………………………………………………………… 2 分

因为$|PM|$的最小值即为 $M(-1,2)$到直线 $x-y-3=0$ 的距离，

由于 $d=\frac{|-1-2-3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，即$|PM|_{\min}=3\sqrt{2}$， ………………………………………… 4 分

所以$|PA|=\sqrt{|PM|^2-|AM|^2}=\sqrt{|PM|^2-2}\geqslant\sqrt{(3\sqrt{2})^2-2}=4$，即$|PA|_{\min}=4$. ……………… 6 分

(2)由(1)知，当$|PA|$取最小值时，直线 MP 垂直直线 $x-y-3=0$，

可得直线 MP 的方程为 $y-2=-(x+1)$，即 $x+y-1=0$，

联立$\begin{cases}x-y-3=0,\\x+y-1=0,\end{cases}$解得 $P(2,-1)$，……………………………………………………………… 8 分

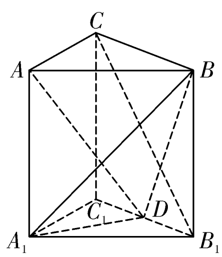
因为 $MA\perp AP$，$MB\perp BP$，所以 M,A,P,B 四点共圆，

故以 MP 为直径的圆的方程为$(x+1)(x-2)+(y-2)(y+1)=0$，…………………………………………… 10 分

又已知圆 M：$(x+1)^2+(y-2)^2=2$，

两圆方程相减得 AB 的方程为 $3x-3y+7=0$. ………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)连接 A_1D，如图所示.



因为 D 为 B_1C_1 的中点，且 $A_1B_1=A_1C_1$，所以 $A_1D\perp B_1C_1$. ………………………… 1 分

又 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，故 $CC_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$，……………………………… 2 分

因为 $A_1D\subset$平面 $A_1B_1C_1$，所以 $A_1D\perp CC_1$. …………………………………… 3 分

又 $CC_1\cap B_1C_1=C_1$，CC_1，$B_1C_1\subset$平面 CC_1B_1B，所以 $A_1D\perp$平面 CC_1B_1B， ………… 4 分

又 $B_1C\subset$平面 CC_1B_1B，所以 $B_1C\perp A_1D$. ………………………………………………………… 5 分

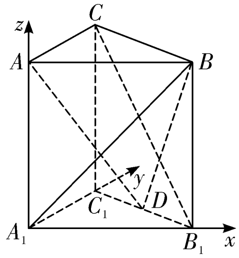
又 $B_1C\perp A_1B$，$A_1D\cap A_1B=A_1$，A_1D，$A_1B\subset$平面 A_1BD，

所以 $B_1C\perp$ 平面 A_1BD，又 $BD\subset$ 平面 A_1BD，所以 $BD\perp B_1C$. ………………………………………… 6 分

(2) 因为 $AB\perp AC$，则 $A_1B_1\perp A_1C_1$，又 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，

故 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，又 A_1B_1，$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp A_1B_1$，$AA_1\perp A_1C_1$，

故 AA_1，A_1B_1，A_1C_1 两两垂直，则以 A_1 为坐标原点，建立空间直角坐标系，如图所示. ………… 7 分



设 $AB=AC=2$，$AA_1=a$，则 $A_1(0,0,0)$，$A(0,0,a)$，$B_1(2,0,0)$，$B(2,0,a)$，$C_1(0,2,0)$，

$C(0,2,a)$，$D(1,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,-a)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-2,2,a)$，

因为 $BD\perp B_1C$，所以 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{B_1C}=2+2-a^2=0$，解得 $a=2$，

故 $A(0,0,2)$，$B(2,0,2)$，$C(0,2,2)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(1,1,-2)$， ………………… 9 分

设平面 ABD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ x+y-2z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，解得 $x=0$，$y=2$，

则 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$，又 $\overrightarrow{B_1C}=(-2,2,2)$，………………………………………………………… 11 分

设直线 B_1C 与平面 ABD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\boldsymbol{m}|\,|\overrightarrow{B_1C}|}=\dfrac{6}{\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

即直线 B_1C 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设事件 A 表示“甲获得该高校综合评价录取资格”，

事件 B 表示“乙获得该高校综合评价录取资格”，

则 $P(A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，…………………………………………………… 2 分

∴甲、乙两位考生中有且只有一位考生获得该高校综合评价录取资格的概率为：

$P=P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=\dfrac{1}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{6}\right)+\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{18}$. …………………… 4 分

(2)设事件 C 表示“丙获得该高校综合评价录取资格”，则 $P(C)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$，

三人中至少有一人获得该高校综合评价录取资格的对立事件是三人都没有获得该高校综合评价录取资格，

∴三人中至少有一人获得该高校综合评价录取资格的概率为：

$P=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{91}{216}$. …………………………………………… 7 分

(3)记 X 为甲、乙、丙三名考生中获得该高校综合评价录取资格的人数，

则甲、乙、丙三名考生获得该高校综合评价录取资格的人数为 1 人或 2 人的概率 $P=P(X=1)+P(X=2)$，

又 $P(X=1)=\dfrac{1}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{6}\right)+\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\dfrac{1}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{6}\right)+\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{75}{216}$， … 9 分

$P(X=2)=\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{15}{216}$， …………………… 11 分

所以 $P=P(X=1)+P(X=2)=\dfrac{75}{216}+\dfrac{15}{216}=\dfrac{5}{12}$. ……………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)因为椭圆 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，所以 $A_1(-2,0)$，$B(0,-1)$.

设 $E(m,n)(m>0,n>0)$，则 $\dfrac{m^2}{4}+n^2=1$，即 $m^2+4n^2=4$.

则直线 BE 的方程为：$y=\dfrac{n+1}{m}x-1$，令 $y=0$，得 $x_C=\dfrac{m}{n+1}$；

同理,直线 A_1E 的方程为:$y=\frac{n}{m+2}(x+2)$,令 $x=0$,得 $y_D=\frac{2n}{m+2}$. ………………………………………… 2 分

所以 $S_{A_1BCD}=\frac{1}{2}\cdot|A_1C|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{m}{n+1}+2\right|\cdot\left|\frac{2n}{m+2}+1\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{(m+2n+2)^2}{(m+2)(n+1)}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2+4n^2+4+4mn+4m+8n}{mn+m+2n+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4mn+4m+8n+8}{mn+m+2n+2}=2$.

即四边形 A_1BCD 的面积为定值 2. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)由题意知,直线 l 的斜率不为 0,则不妨设直线 l 的方程为 $x=ky+b(b\neq2)$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x=ky+b,\end{cases}$ 消去 x 得 $(k^2+4)y^2+2kby+b^2-4=0$,

$\Delta=4k^2b^2-4(k^2+4)(b^2-4)>0$,化简整理,得 $k^2+4>b^2$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\frac{-2kb}{k^2+4}$,$y_1y_2=\frac{b^2-4}{k^2+4}$. ………………………………… 6 分

因为 $A_2M\perp A_2N$,所以 $\overrightarrow{A_2M}\cdot\overrightarrow{A_2N}=0$.

因为 $A_2(2,0)$,所以 $\overrightarrow{A_2M}=(x_1-2,y_1)$,$\overrightarrow{A_2N}=(x_2-2,y_2)$,得 $(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=0$,

将 $x_1=ky_1+b$,$x_2=ky_2+b$ 代入上式,得 $(k^2+1)y_1y_2+k(b-2)(y_1+y_2)+(b-2)^2=0$,

得 $(k^2+1)\cdot\frac{b^2-4}{k^2+4}+k(b-2)\cdot\frac{-2kb}{k^2+4}+(b-2)^2=0$,解得 $b=\frac{6}{5}$ 或 $b=2$(舍去), ……………… 8 分

所以直线 l 的方程为 $x=ky+\frac{6}{5}$,则直线 l 恒过点 $Q\left(\frac{6}{5},0\right)$,

所以 $S_{\triangle A_2MN}=\frac{1}{2}|A_2Q|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{8}{25}\times\sqrt{\frac{25(k^2+4)-36}{(k^2+4)^2}}$.

设 $t=\frac{1}{k^2+4}$,则 $0<t\leqslant\frac{1}{4}$,$S_{\triangle A_2MN}=\frac{8}{25}\times\sqrt{-36t^2+25t}$,……………………………………………… 10 分

易知 $y=\frac{8}{25}\times\sqrt{-36t^2+25t}$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ 上单调递增,所以当 $t=\frac{1}{4}$ 时,$S_{\triangle A_2MN}$ 取得最大值 $\frac{16}{25}$.

又 $S_{\triangle A_2MN}=\frac{1}{2}|A_2M|\cdot|A_2N|$,所以 $(|A_2M|\cdot|A_2N|)_{\max}=2(S_{\triangle A_2MN})_{\max}=\frac{32}{25}$. ……………………… 12 分